Regard sur le calcul mental (à paraître dans Math-Ecole)

Luc-Olivier Pochon, IRDP

"Can you do Addition ?" the White Queen asked. " What's one and one and one and one and one and one and one and one and one and one ?".
"I don't know", said Alice. "I lost the count."
"She can't do Addition," the Red Queen interrupted.

Lewis Carrol, Through the looking-glass.

Présentation

Le calcul mental n'a pas la réputation d'être le sujet favori des élèves ni des maîtres! Il n'a pourtant jamais cessé de figurer dans les programmes de l'école élémentaire. Mais la façon de l'aborder a évolué et des propositions didactiques sous l'appellation de "calcul réfléchi" ou "pensé" ont vu le jour. On trouve dans la littérature pédagogique de nombreuses propositions pour son acquisition, propositions alliant des recettes de calcul à certaines théories plus générales. La question se pose alors de savoir comment relier et utiliser les propositions éparses.

Dès que l'on veut étudier les procédures possibles pour effectuer un calcul, il est assez difficile de savoir quels sont les paramètres à prendre en compte. Pour aborder ce problème, nous avions imaginé avec Jean-François Perret[1] de construire un "automate" qui, à partir d'un énoncé, produise les étapes nécessaires à la réalisation du calcul et donne une indication sur le coût du procédé. Le problème est par exemple de produire automatiquement un protocole du type:

54 + 27
considérer 50; calcul à effectuer : 50 + 27 + 4
déjà additionner 50 et 27, calcul à effectuer : 50 + 27
additionner 50 et 27, résultat : 77
encore additionner 4, calcul à effectuer : 77 + 4
emprunter à 4, calcul à effectuer : 80 + 1
additionner 80 et 1, résultat : 81

MPT: 5/6/7 coût global: 19.23[2]

Cet article, après un tour d'horizon de la littérature traitant du calcul mental, prend comme prétexte la réalisation de l'automate de calcul pour organiser des données

[1] Pochon, L.-O. & Perret, J.-F. (à paraître) Etude de quelques procédures de calcul mental en vue de leur modélisation : perspective didactique.

[2] Les trois coeffcients M, P et T donnent une idée sur les opérations liées à la mémoire, celles liées au processus de calcul et la longueur de la procédure. Le coût global est une moyenne pondérée de ces trois coefficients; il permet d'apprécier globalement le niveau de difficulté du calcul.

utiles à une certaine compréhension du phénomène du calcul mental. On verra que l'entreprise est forcément limitée. Le calcul mental n'est pas une mince affaire.

Le calcul mental

Jamais vraiment remis en cause, la position du calcul mental n'a toutefois pas toujours été la même au gré des réformes. Classiquement, le calcul mental était lié à l'apprentissage des tables et la didactique en était fort réduite. Tout au plus trouvait-on des exercices progressifs qui passaient en revue divers procédés qui devaient permettre à l'élève d'aborder des calculs de plus en plus complexes à partir d'un travail par l'exemple. On trouve également la pratique du calcul rapide qui peut remplir plusieurs fonctions. Elle peut être considérée comme une activité exerçant une certaine agilité de l'esprit. Elle implique aussi de trouver des procédures efficaces, mais les élèves ne semblaient pas être amenés à prendre conscience de ces procédures ou, comme les appelle R. Brissiaud[3], les "gestes mentaux". Dans la réforme des années septante, les propriétés des opérations sont introduites qui peuvent permettre en partie à exprimer ces gestes mentaux. Toutefois, la pratique du calcul mental est plus subtile que l'application des règles données par les axiomes régissant les ensembles de nombres. Les chercheurs en didactique ont affiné les analyses qui permettent de nommer ces gestes mentaux et ainsi de permettre au calculateur de les répertorier et d'en avoir une meilleure conscience en suivant l'un des préceptes énoncé par ERMEL: *Pour devenir transférables, les connaissances doivent être reconnues, nommées, decontextualisées*[4]. Cette façon d'aborder le calcul mental est connu sous l'appellation de calcul raisonné. François Conne[5] propose de traiter ces procédures au même titre que les algorithmes classiques, c'est-à-dire que le calcul réfléchi est étudié en tant que traitement symbolique qui substitue à une opération de calcul une autre ou une séquence d'opérations plus élémentaires mais équivalentes. Dans cette perspective les opérations de "bas niveau" (utilisation de la contine ou du compteur qui permet d'ajouter 1 un nombre de fois nécessaire) ne sont pas prises en compte, contrairement à ce que font des neuro-psychologues[6].

Dans des moyens d'enseignement, on trouve des informations plus précises quant aux stratégies didactiques à mettre en œuvre.

Ainsi dans ERMEL[7] des listes de calculs sont donnés qui sont à réaliser en utilisant des répertoires de résultats. Par exemple:

---

[3] Brissiaud, R. (1996) *J'apprends les maths, CE2, livre du maître*. Paris: Retz

[4] ERMEL (1991) *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages numériques CP*. Paris: Hatier.

[5] Conne, F. (1987) Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire. *Math-Ecole* 128, 2-11.

[6] Voir par exemple l'ouvrage: Dehaene, A. (1997) *La bosse des maths*. Paris: Editions Odile Jacob.

[7] ERMEL (1993) *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages numériques CE1*. Paris: Hatier.

- sachant que 3+6 = 9, 7-5 = 2, 10-7 = 3, 7+8 = 15, 13-5 = 8, 10-4 = 6 on peut de façon consciente chercher les résultats de 23+6, 67+8, 127-5, etc. (CE1)
- De même le répertoire 16+16 = 32, 37+10 = 47, 46-10 = 36 permet d'obtenir les résultats 16+17, 37+9, 46-9 (CE2).

Des auteurs donnent des procédés de façon plus génériques. Ainsi R. Brissiaud[8] mentionne l'usage des *doubles* (6+7 -> 6+6+1) ; le *retour au 5* (8+6 -> 5+5+3+1) ; le *passage à la dizaine* (9+4 -> 10+3) ; le *retour à la dizaine* (12+6 -> 10+6+2).

Dans un autre ouvrage déjà cité du même auteur on trouve les processus de soustraction *en avançant* (pour effectuer 104-6) et *en reculant* (pour effectuer 104-98). De même, deux gestes mentaux sont donnés pour la division: le *partage* (1311:3) ou la *division groupement* (168:25).

F. Boule[9] propose comme procédure générale la *méthode du pivot* (considérer 9 comme 10-1), celle du *décalage* (31-18 -> 30-17) et celle du *jalonnement* (qui correspond à la procédure *en avançant* de Brissiaud).

Les nouveaux moyens d'enseignement romands[10] présentent également de telles familles de procédures. Dans ces ouvrages, les procédures sont décrites moins systématiquement et se basent davantage sur des observations de pratiques de calcul chez les élèves. La méthode générale s'appuie sur les propriétés formelles des opérations arithmétiques et les auteurs précisent que le calcul réfléchi repose sur ces propriétés mises en œuvre de façon consciente.

Si on veut essayer de modéliser ces procédés de calcul, on s'aperçoit qu'il est nécessaire de préciser un peu plus le contexte dans lequel l'opération est effectuée de même que les différentes étapes du calcul.

Tout d'abord, il s'agit de préciser la façon dont l'énoncé est présenté: calcul présenté en ligne, en colonne ou oralement. Une présentation en colonne va plutôt inciter le calculateur à reproduire l'algorithme des opérations en colonne et à travailler sur les chiffres. Un énoncé oral, va augmenter la difficulté liée à la mémorisation à court terme. Le calcul écrit en ligne incite à travailler sur les nombres et le fait que l'énoncé reste à disposition va évidemment influencer les procédures mises en jeu. Ici, c'est toujours de ce type d'énoncé dont il sera question. Il y a aussi le type de traces que le calculateur va utiliser. Ainsi J.

ERMEL (1995) Apprentissages numériques, cycle des apprentissages numériques CE2. Paris : Hatier.

[8] Brissiaud, R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer : au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles*. Paris: Retz

[9] Boule, F. (1996) 31-18 ? Regards sur le calcul mental. *Grand N*, 58, p 39-52.

[10] Gagnebin, A., Guignard, N. & Jaquet, F. (1997) *Apprentissage et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel: COROME.

Régnault[11] distingue chez les "grands" calculateurs, les calculateurs au tableau et les calculateurs purement mentaux, sachant que chez ces derniers, il peut y avoir des procédés mnémotechniques qui peuvent faire intervenir une certaine gestuelle.

On a vu que du point de vue didactique, la volonté est souvent de garder la structure du calcul qui se transforme. Or les grands calculateurs considèrent explicitement un *registre* "à part" qui permet de cumuler au fur et à mesure les résultats obtenus ce qui évite de considérer une multitude de résultats partiels. Il est intéressant de noter que la conscience de ce registre est très forte chez les calculateurs prodiges. Ainsi J. Régnault explicitant le produit 624 par 7 explicite:

On voit 6 fois 7 = 42
7 fois 2 = 14, on voit 43 4
7 fois 4 = 28, on voit 43 6 8

A noter encore que pour augmenter la capacité de ce registre, les nombres sont souvent transformés en syllabes formant des mots qu'il semble plus facile à retenir.

On voit aussi sur l'exemple précédent que les grands calculateurs procèdent de gauche à droite (aussi bien pour l'utilisation des termes ou des facteurs que des chiffres). Cette loi apparaît explicitement aussi dans certaines propositions didactiques[12].

Il est certain que la possibilité de calcul est liée au registre de nombres, ou espace numérique, à disposition du calculateur. Il faut que les nombres en présence et le résultat fassent partie de son registre numérique. Cela expliquerait, par exemple, le fait que de jeunes élèves procèdent en utilisant des procédés reprenant l'algorithme de calcul en colonne qui est coûteux du point de vue calcul mental, alors que des élèves plus âgés peuvent plus facilement retrouver des résultats par d'autres procédures[13]. Le travail avec l'algorithme "en colonne" permet de traiter de grands nombres même si l'on est incapable d'interpréter ou de donner un sens au résultat[14]. La possibilité de travailler par approximation est certainement aussi lié à la richesse de ce répertoire.

Ce répertoire est constitué de nombres dont on connaît des particularités intéressantes : 11 = 3x37 ; 1001 = 7x11x13. Mais il peut également faire appel à des aspects visuels (nombres triangulaires), voir auditifs, tactiles et même semble-t-il olfactifs. Les répertoires des calculateurs prodiges sont

---

[11] Régnault, J. (1952) *Les calculateurs prodiges: l'art de jongler avec les nombres (illusionnisme et calcul mental)*. Paris : Payot.

[12] Bacquias, M. (1990) Calcul-lecture. *Bulletin de l'APMEP*, 375, 453-459. Cette procédure est aussi évoquée par Brissiaud (1989, op. cit.).

[13] Boule, op. cit.

[14] L'algorithme en colonne apparaît ainsi comme un outil permettant d'acquérir un répertoire mais aussi comme une invite au psittacisme.

impressionnants voire hypertrophiés. Ils semblent toujours liés à des histoires de vie particulières (consultation névrotique du calendrier), à un attrait particulier pour les nombres qui mène à jouer avec tous ceux que l'on rencontre (plaques de voitures, numéros des cantiques affichés à l'église!). Véronique Guggisberg[15] proposait de rendre les enfants conscients de leur répertoire par des périodes de discussion et de mise en commun. Dans l'expérience qu'elle relate, une calculatrice servait à la fois de prétexte à cette pratique et de mémoire.

Différents niveaux de procédures

Les procédures liées au structures cognitives de base

Les recherches en neuro-psychologie[16] montrent qu'à la base du nombre et du calcul, le cerveau possède des circuits cérébraux spécialisés pour le traitement des petits nombres (jusqu'à trois) qui constituent l'*accumulateur*. Des calculs portant sur des petits nombres vont donc s'effectuer à l'aide de ces circuits selon un processus neuronal inconscient connu sous la dénomination de *subitisation*. Plus ou moins lié à ce processus, on montre aussi que l'addition de petits nombres va demander une évocation de la procédure +1. Le temps de calcul va donc être proportionnel à la somme des nombres chez de petits enfants puis au minimum des deux termes vers 7 ans. Chaque addition de l'unité va ainsi demander environ 4 dixièmes de seconde[17]. Cette loi du minimum souffre des exceptions pour les doubles (4+4) et ne s'applique plus chez des enfants plus âgés. A ce niveau intervient également le recours à la mémoire à long terme (MLT) dont le temps d'accès est variable (en moyenne 1,3 secondes pour 8+7). Les variations sont liées à divers facteurs. Ce temps d'accès serait principalement lié à la longueur du calcul, mais il semble que l'on pourrait également évoqué des procédures mixtes. Ainsi pour additionner 15+17, un recours à la MLT aurait lieu pour 15+15 et les passages de 17 à 15 de même que de 30 à 32 serait de type subitisation. On retiendra le mot de "glissement" pour nommer ce phénomène. Bab (6 ans) qui répond 8 à la question "combien font 5+3" et ajoute "parce que c'est 4+4" semble en fournir un témoignage.

Les procédures naturelles

Ces procédures sont celles considérées par le calcul réfléchi. Il semble utile d'en distinguer deux grandes catégories, celles qui mettent en œuvre le registre et celles qui procèdent par transformation du calcul. Selon notre cadre, les premières sont globalement moins coûteuses dans la mesure où l'information à disposition reste toujours visible. Les procédures avec transformation demande un plus grand

[15] Guggisberg, V. (1993) *Une calculatrice de poche dans l'enseignement spécialisé: pour compter et pour raconter*. Neuchatel: Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques. Recherche 93.102. Guggisberg, V. & Balmelli, A. (1992) Usage d'une calculatrice de poche dans l'enseignement spécialisé. *Math-Ecole* 151, 23-28.

[16] Selon Dehaene, op. cit.

[17] Ce résultat "historique" de Groen & Parkman est rapporté par Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre, du comptage à la résolution de problèmes*. Neuchâtel: Delachaux & Niestlé.

effort de mémorisation (31-18 -> 30-17). Toutefois, il semble que pour certains élèves, le fait d'utiliser un procédé "bien" connu prime sur son efficacité.

Les principes généraux qui permettent d'orchestrer ces opérations de base sont d'une part que les termes et les digits sont pris dans l'ordre de lecture, c'est-à-dire de gauche à droite. Toutefois, dans certains cas, le terme le plus grand ou le plus "attirant" est considéré en premier. Toutefois cela ne va pas sans problème: on trouve par exemple que l'addition 54+27 prend environ 5 seconde alors que 27+54 va prendre 1,5 secondes supplémentaires pour certains sujets. La différence pourrait être attribuée à une valse-hésitation entre deux procédures. De même dans le calcul 15+17+5 le regroupement du 15 et du 5 est intelligent, mais selon le calculateur, ce n'est pas la procédure la plus efficace.

Les procédures élaborées

Les procédures naturelles vont permettre de calculer 15 x 112 soit en faisant 10 x 112 + 5 x 112 ou en considérant 30 x (60-4). L'utilisation de 10 x (112 + 56) dépasse ce stade et va faire partie des procédures élaborées que l'on peut découvrir par soi-même mais qui suppose en général un certain enseignement. C'est le domaine des calculateurs "instruits" qui vont par exemple considérer des règles du type : 37x39 = 38x38 - 1 puis 38x38 = 36x40 + 4. On a regroupé un certain nombre de ces procédures en encadré. Si elle ne sont pas vraiment utiles de nos jours (à moins de vouloir réaliser des "tours" de calcul), elles peuvent constituer de bonnes situations-problèmes ayant trait aux nombres et aux propriétés des opérations. Certaines d'entre-elles figurent d'ailleurs à ce titre dans des moyens d'enseignement de nos écoles.

En définitive, le calcul mental suppose donc la connaissance d'un répertoire de résultats, des règles de fonctionnement du système de numération (orale et écrite) et l'utilisation de certaines règles de transformations licites sur les opérations concernées. C'est son aspect formel. Mais il met en œuvre de façon essentielle des circuits cérébraux divers, mémoire de travail, répertoire dans la mémoire à long terme, aspects visuels, verbaux ainsi qu'un accumulateur.

Que peut-on modéliser ?

Registre et contrôle du registre

Au niveau de la mémoire de travail, il est naturellement possible de créer une "case" servant de registre pour les résultats partiels. Il faut également contrôler ce registre afin de ne pas y enregistrer de résultats intempestifs. Par exemple dans le calcul 31-18 après avoir cumuler 20, le calcul de 1-8, se transforme en 7, qu'il ne faut pas cumuler mais reprendre afin d'effectuer la soustraction.

Répertoire nombres noyaux et nombres amis

L'espace numérique ne pourra se référer qu'à des relations entre des nombres (les aspects visuels, tactiles, ne peuvent être envisagés pour des raisons évidentes de complexité et de nature!). On considérera les nombres noyaux (en mode additif ou multiplicatif) dont toutes les décompositions sont connues de façon quasi instinctive. A côté de cela, on considère les nombres amis qui sont des groupes de nombre dont le résultat est aussi connu (45+55). A noter qu'il faut considérer des progressions; ainsi on connaît tout d'abord des couples amis concernant 100 (50+50, 45+55, etc.). Par glissement, ce répertoire s'élargit au fur et à mesure de l'exercice et un dispositif peut se mettre en place qui permet de trouver rapidement le complémentaire d'un nombre à 100. Ce procédé peut devenir ensuite complètement "instinctif".

Les procédures de base

On retiendra l'itération de la procédure +1 de même que des procédures liées au fonctionnement verbal du code: 100+12 = 112. Il faut aussi considérer les reconstructions telles que 10+20 à partir de 1+2. Le calcul étant donné en ligne, il faut aussi penser que certains calculateurs travailleront sur les chiffres (de gauche à droite). C'est assez aisé pour 112+23, le procédé peut également se généraliser par des approximations successives lorsqu'il y a peu de retenues (112+91). Par contre, ce procédé n'entre plus en ligne de compte dans des cas plus complexes (112+89).

Les procédés naturels

Parmi les opérateurs, on considérera tout d'abord la famille des opérateurs de cumul: 54+27 (on commence par cumuler 54 ou 50 ou même directement 70), 108 - 94 (on commence par cumuler 8), 102-6 (on commence par cumuler 4). Mis à part le dernier exemple, ils ménagent relativement le travail de la mémoire dans la mesure où les données restent à disposition.

Une autre famille est celle des compensations avec emprunt (57+24 -> 60+21), le grignotage (31-18 -> 30-17), l'ajout (28-19 -> 29-20) et l'évaporation (29-15 -> 19-5). Ici la mémoire de travail est mise à plus forte contribution.

Lorsque la multiplication intervient, il faut encore considérer les compensations multiplicatives (15x12 -> 30x6) et les décompositions (12x15 -> 150 + 2x15).

Les savoirs mis en œuvre correspondent à chacun de ces procédés. En tout premier lieu on trouve évidemment la connaissance du système positionnel sans lequel la manipulation des "grands" nombres devient pratiquement impossible (mais cette connaissance peut être remplacée par un riche répertoire de nombres amis, par exemple liés à 5). Il y a ensuite les propriétés classiques des opérations: commutativité et associativité qu'il est difficile de dissocier, et la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication. Il faut également inclure une certaine perception des nombres relatifs (savoir que l'on peut considérer en cours de calcul le nombre -10 !). Finalement, bien que découlant des propriétés générales des opérations, on peut aussi prendre en compte des propriétés plus primitives telles que la compensation additive (12+8 = 10+10) et multiplicative (4x25 = 2x50). On a ajouté également une capacité de réversibilité, qui indique une connaissance des tables telle qu'il est possible de les utiliser "à l'envers".

Des principes généraux

Le problème est de savoir comment choisir une procédure plutôt qu'une autre. Cela va dépendre naturellement des concepts qui sont maîtrisés. Les nombres en présence peuvent aussi influencer sur ce choix, en particulier la numérosité (le nombre de chiffres), l'angulosité (le nombre de chiffres sans les zéros de droite), la capacité de reconnaître la divisibilité d'un nombre par un autre et la proximité de nombres connus. Ainsi en présence de 990 + 445 on peut considérer 1000 sans analyser l'autre nombre en présence.

Conclusion

En définitive, le regard porté sur calcul mental a évolué au cours des années. Actuellement, ce n'est plus un outil utile en lui-même, au delà de quelques procédures naturelles. Il garde toutefois un intérêt pédagogique certain.

Tout d'abord, il implique non seulement le mise en œuvre d'un algorithme mais aussi d'une stratégie. Ensuite, il constitue un domaine où il est relativement facile de procéder à une certaine introspection: essayer de formuler la manière dont on calcule. Il offre donc un aspect métacognitif qui prend en compte une belle panoplie de capacités cognitives.

Il ouvre également une certaine réflexion par rapport à une stratégie pédagogique basée sur une progression fixée a priori. En effet, il y a un saut entre les propriétés du calcul et les règles mises en œuvre dans les procédés naturels. Il montre qu'un va et vient, favorisé par la médiation de l'enseignant, s'avère nécessaire entre les règles enseignées et les pratiques effectives

La perspective de l'automate implique de considérer des éléments hors du champ purement mathématique (la théorie des machines à états finis pourraient toutefois fournir un modèle envisageable). On a vu qu'entrait en considération l'utilisation d'un registre et que la façon dont l'énoncé était présenté avait une influence sur la méthode utilisée. Par contre, il resterait à mieux comprendre la manière dont les choix des méthodes sont effectués en constatant que celles-ci peuvent évoluer en cours de calcul. Ainsi, il pourrait être intéressant de mieux caractériser le "superviseur" qui semble être mis en œuvre pour suspendre un calcul afin de permettre au calculateur de repartir sur une nouvelle voie.

Le calcul mental est encore loin d'avoir livré tous ses secrets !

Quelques procédures élaborées

On sait généralement obtenir le carré des nombres se terminant par 5.

65 x 65
On multiplie le chiffre des dizaines par lui-même augmenté de 1: 6x7 ; à retenir 42
On juxtapose 25: 4225

Cette procédure se généralise de la façon suivante:

Multiplication de deux nombres à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est le même et les unités sont complémentaires par rapport à 10

74x76
On multiplie le chiffre des dizaines par lui-même augmenté de 1: 7x8 ; à retenir 56
On multiplie les chiffres de unités: 4x6 = 24
On juxtapose: 5624

Même situation, mais les chiffres des dizaines diffèrent d'une unité

43x57
On multiplie le chiffre des dizaines du petit par celui du grand augmenté de 1: 4x6 ; à retenir 24
On mutiplie les chiffres des unités: 3x7 = 21
On juxtapose: 2421
On additionne 10 fois le nombre des unités du petit nombre: 2421 + 3x10 = 2451

Multiplication de deux nombres à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est le même (les unités sont quelconques)

63x64
On multiplie un nombre augmenté des unités de l'autre par le chiffre des dizaines: 6x67 ; à retenir 402
On multiplie les chiffres de unités: 3x4 = 12
On "juxtapose" avec décalage: 4032

Multiplication de nombres voisins de 100 (selon Sol Stone[18])

97 x 86 ;
On additionne les nombres 97+86 = 183; on supprime la centaine ; à retenir 83
Complément de 97 à 100: 3
Complément de 86 à 100: 14
Produit des compléments: 14 x 3 = 42
On juxtapose: 8342

Question: quelles sont les limites de validité de ce procédé?

---

[18] Stone S. (sans date) *Méthode Sol. Stone : l'art de vite calculer*. Cirque Barnum.

Racine cubique d'un nombre (selon Mantis[19])

Le problème est de retrouver la racine cubique d'un cube parfait.

Un calculateur connaît les cubes des nombres de 1 à 9

nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cube	1	8	27	64	125	216	343	512	729

On notera également que le chiffre des unités des cube est soit égal au nombre de départ (pour 1, 4, 5, 6, 9) soit son complément à 10 (pour 2, 3, 7, 8). C'est aussi un fait que tout calculateur qui se respecte se rappelle (à l'aide d'un procédé mnémotechnique).

Cas des cubes de nombres de deux chiffres:

En voyant 274 625 on sait tout de suite que la dizaine doit être 6 et que le chiffre des unités est 5: résultat 65

En voyant 238 238 on sait tout de suite que la dizaine doit être 6 et que le chiffre des unités est 2: résultat 62

Cas des cubes de nombres de trois chiffres, exemple : 143 055 667

Le procédé précédent nous montre que le résultat est de la forme x = 5?3

Pour déterminer le chiffre des dizaines, Mantis va effectuer une réduction modulo 11 dont il connaît la table.

X mod 11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^3 mod 11	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

Pour calculer le reste de la division par 11, il suffit de faire la somme alternée des chiffres du nombre (les chiffres de position impaire étant pris positivement) :

143 055 667 mod 11 = 22-15 = 7
x mod 11 doit valoir 6 selon la table des reste modulo 11
5+3 - ? = 6 conduit à x = 523

Question: ce procédé est-il applicable aux racines carrées, cinquièmes, etc.

[19] Mantis (1908) *Curieuses expériences de calcul sur les quatre règles et la racine cubique*. L'illusioniste.